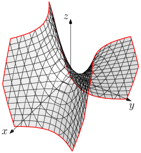
高等数学及应用
(第二版)

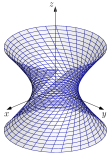
吕同富 教授 编

Email: ltongfu@126.com

高等教育出版社

2012 年 4 月





内容提要

1. 极限与连续
   - 函数极限
   - 极限的性质
   - 极限四则运算
   - 两个重要极限
   - 无穷小
   - 无穷远极限与铅直水平渐近线
   - 函数连续的概念
   - 初等函数连续性

内容提要

1. 极限与连续
   - 函数极限
   - 极限的性质
   - 极限四则运算
   - 两个重要极限
   - 无穷小
   - 无穷远极限与铅直水平渐近线
   - 函数连续的概念
   - 初等函数连续性
2. 致 谢

第一章 极限与连续

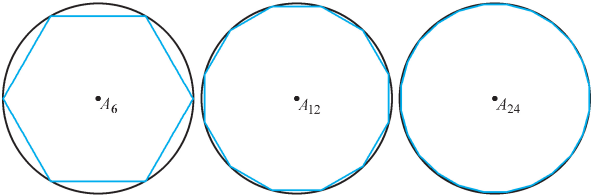
学习目标与要求

1. 理解极限与连续的概念，会用极限方法解决实际问题.
2. 掌握用极限方法判断函数在某点的连续性.
3. 掌握闭区间连续函数的性质.

函数极限

实际问题1.1 (圆的周长与面积)

在生产和实践中，人类首先学会求正方形、矩形、三角形、平行四边形、梯形、任意多边形的周长和面积. 我国三国时期数学家刘徽为了计算圆的周长和面积，于魏景元四年(公元263年)创立了“割圆术”. 刘徽的作法是：作圆的第一个内接正多边形(正六边形)，平分每个边所对的弧作第二个内接正多边形(正十二边形)，以下用同样的方法，继续作圆的第三个内接正多边形(正二十四边形)，圆的第四个内接正多边形(正四十八边形)……如图 1所示.



圆的周长与面积

显然，每个圆内接正多边形的周长和面积都容易求得．于是，得到圆的内接正多边形周长序列：

$$P_6, P_{12}, P_{24}, \cdots, P_{2^{n-1}6}, \cdots . \tag{1.1}$$

圆的内接正多边形面积序列：

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots, A_{2^{n-1}6}, \cdots . \tag{1.2}$$

其中，通项$P_{2^{n-1}6}$表示第n次作的正$2^{n-1}\times 6$边形的周长，通项$A_{2^{n-1}\times 6}$表示第n次作的正$2^{n-1}6$ 边形的面积．正多边形周长序列逼近圆的周长，正多边形面积序列逼近圆的面积．刘徽说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣．"对于正多边形的周长，当n无限增大时，圆的内接正多边形周长序列$\{P_{2^{n-1}6}\}$将逐渐稳定趋于某个数l．"割之弥细"，用圆的内接正多边形的周长近似代替圆的周长，而圆的周长"所失弥少"，当"割之又割，以至于不可割"，即圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时，圆的内接正多边形的极限位置"则与圆合体"，此时，圆的内接正多边形周长序列$P_{2^{n-1}6}$稳定于某个常数l，l就是圆的周长，只有在无限的过程中才能真正"无所失矣"．图 1的渐近过程很快，可以放慢了看一下，如图2所示(这不是刘徽当时的原作)．

图 1的渐近过程很快，可以放慢了看一下，如图 2所示(这不是刘徽当时的原作).

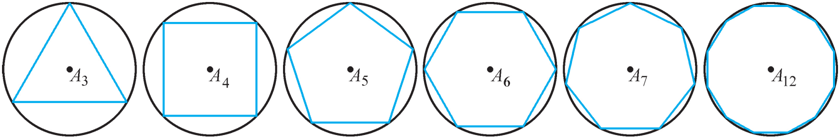


Figure 2： 正多边形逼近圆

根据上述分析，圆的周长可以这样定义：若圆的内接正多边形的周长序列$P_{2^{n-1}6}$稳定于某个数l(当n无限增大时)，则l 为圆的周长.

圆是曲边形，它的内接多边形是直边形，二者有本质区别，但是这个区别又不绝对，当“圆的内接正多边形的边数无限增加”时，圆的内接多边形转化为圆周．因此，在无限的过程中，直边形能转化为曲边形．即在无限的过程中，由直边形的周长序列得到了曲边形的周长．这就是极限思想和方法在定义圆的周长时的应用.

根据圆周长的定义，可以计算出半径为r的圆周长 $c=2\pi r$.

实际问题1.2 (温度下降趋势)

将一个温度为500°C的物体移置室温为25°C的房间中，观察温度变化趋势. 结果发现，开始高温物体温度降低很快，迅速降到400°C、300°C、200°C、100°C……随着时间的延长，高温物体温度下降越来越慢，经验告诉我们，如果“时间足够长”，这个物体的温度将降至室温25°C. 如图 3所示. 用符号表示为

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 25.$$

实际问题1.3 (电阻对电流强度的影响)

由Ohm定律可知，电压＝电阻×电流强度，$U = RI$，当电压U一定时，电流强度I与电阻R成反比，$I = \frac{U}{R}$，即随着电阻的增大电流会越来越小. 如图 4所示. 用符号表示为

$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0.$$

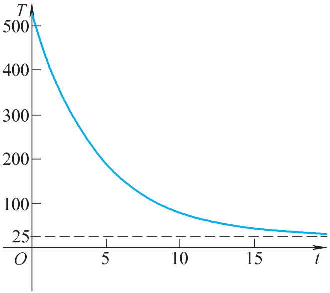


Figure 3： 物体温度越来越小

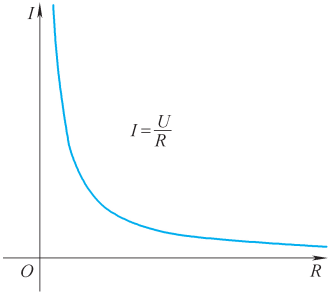


Figure 4： 电流强度越来越小

定义 1.1 (无穷远点极限的描述性定义)

如果当x绝对值无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$的极限．记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A. \tag{1.3}$$

如果当x正向无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$的极限．记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A. \tag{1.4}$$

如果当x负向无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$的极限．记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A. \tag{1.5}$$

例1.1

观察研究函数$y=\dfrac{1}{x^2}, y=\dfrac{2x}{x-3}, y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$的图像(图5、6、7)

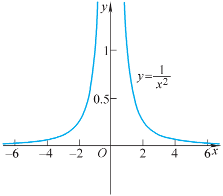


Figure 5 : $y=\frac{1}{x^2}$

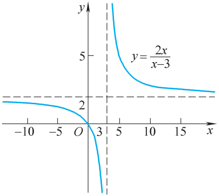


Figure 6 : $y=\frac{2x}{x-3}$

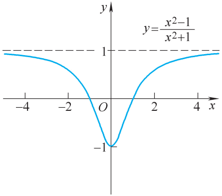


Figure 7 : $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0, \quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-3}=2, \quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1.$

例1.2

观察研究函数$y=\arctan x, y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$的图像(图 8、9)

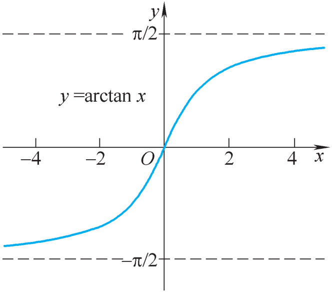


Figure 8 : $y=\arctan(x)$

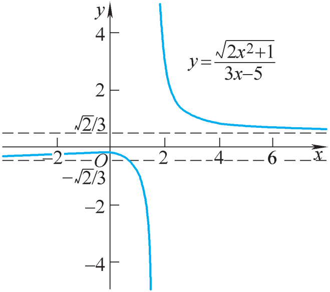


Figure 9 : $y=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

可知

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

实际问题1.4 (夜间路灯下行人影子变化趋势)

你夜间走在街道上，假如距你50m远的正前方有一盏高挂10m的路灯．如图10随着你距离路灯越来越近，你会发现身后的影子越来越短，当你走到路灯下发现影子不见了．也就是说，随着你越来越接近路灯，你身后影子的长度越来越趋于0．

当你走过路灯转身返回时，发现了同样的现象．也是随着你越来越接近路灯时，你身后影子的长度越来越趋于0．

事实上，不论你从哪个方向向路灯走来，随着你越来越接近路灯，你身后影子的长度都越来越趋于0．

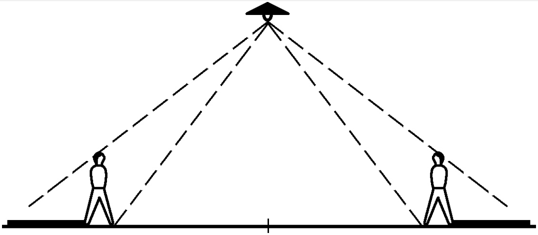


Figure 10： 行人的影子

例1.3

研究函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$附近的变化趋势.

解：对$x\neq 1$，可通过对分子因式分解化简为

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1, x\neq 1,$$

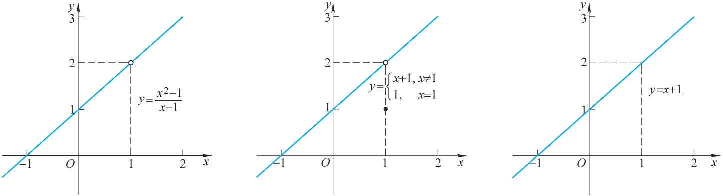


Figure 11 : $y=\frac{x^2-1}{x-1}$

Figure 12 :

Figure 13 : $y=x+1$

因此，$f(x)$的图像是挖掉点(1,2)的直线$y=x+1$，如图 12.

研究函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$附近的变化趋势

研究函数$f(x)$在点$x=1$的函数值，虽然$f(1)$没有定义，但可取一系列趋近1的x值，计算$f(x)$的值(表1) 观察变化趋势.

Table 1： 计算结果

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.1	2.1	0.9	1.9
1.01	2.01	0.99	1.99
1.001	2.001	0.999	1.999
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x\to 1^+$	$f(x)\to 2$	$x\to 1^-$	$f(x)\to 2$

研究函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$附近的变化趋势

结果发现，随着x的值从左边无限趋近1，函数$f(x)$的值无限趋近2．把这个过程称为，当x的值趋近1^-时，$f(x)$ 的左极限是2．记作

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

随着x的值从右边无限趋近1时，函数$f(x)$的值无限趋近2．把这个过程称为，当x的值趋近1^+时，$f(x)$ 的右极限是2．记作

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

不难发现

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

定义 1.2 (x_0点左极限描述性定义)

设$f(x)$至少在x_0点的左侧附近有定义．如果对x_0左侧充分接近x_0的x，$f(x)$能任意接近A，则称当x趋于x_0^-时，A是$f(x)$的左极限．记作$f(x_0^-)$，即

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A. \tag{1.6}$$

定义 1.3 (x_0点右极限描述性定义)

设$f(x)$至少在x_0点的右侧附近有定义．如果对x_0右侧充分接近x_0的x，$f(x)$能任意接近A，则称当x趋于x_0^+时，A是$f(x)$的右极限．记作$f(x_0^+)$，即

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A. \tag{1.7}$$

定义 1.4 (x_0点极限描述性定义)

设$f(x)$除了可能在x_0没有定义外，在x_0的开区间有定义．如果对充分接近x_0的x，$f(x)$能任意接近A，则称A是$f(x)$的极限．当x趋于x_0时，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \tag{1.8}$$

根据x_0点极限描述性定义，不难得到下面结论．

定理 1.1 (函数$f(x)$在x_0点存在极限的充要条件)

函数$f(x)$在x_0点极限存在的充要条件是，函数$f(x)$在x_0点的左极限和右极限都存在且相等．即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A. \tag{1.9}$$

“充分接近，任意接近”都是不确切的描述，他们的含义有赖于不同的情况．对于精加工的机械师来说，“接近”可能是在千分之几厘米之内．对于天文学家来说，“接近”可能是在几千光年之内．但这个定义足够清楚，能使我们识别和计算特定函数的极限．

从图 9、10、11可看出，当x趋近1时，这三个函数的极限都是2．不仅如此，图 9函数在$x=1$没有定义，图 10函数在$x=1$的定义是1，图 11函数在$x=1$ 的定义是2．尽管它们在$x=1$点的定义情况不同，但这并不影响它们在$x=1$点极限值的存在．还有对于图 11 “极限值等于函数值”，这是一个有待于进一步关注的情况．

在定义 1.4所描述的极限定义中，$x\to x_0$的方式是任意的，可以是左边也可以是右边．

例1.4

Heaviside函数H定义为

$$H(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

这个函数是以电机工程师Oliver Heaviside(1850-1925)的名字命名的，可以用来描述一个在$t=0$时刻接通的电流．如图 14所示．

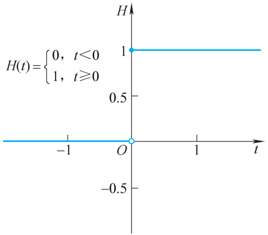


Figure 14： 在0点的极限情况

例1.5

讨论函数$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$ 当$x\to 0$时是否有极限.

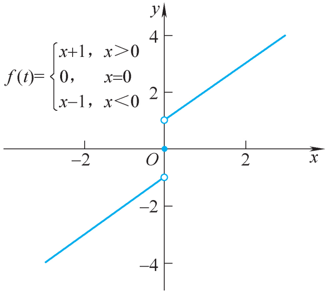


Figure 15： 在0点的极限情况

解：由图 15可知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.
以上两例是函数在某点左、右极限都存在，而函数在该点极限不存在的例子．函数在某点极限不存在的例子还有如下情形.

例1.6 (与无穷有关的极限)

研究函数$y = \frac{1}{x}$在0点的极限情况.

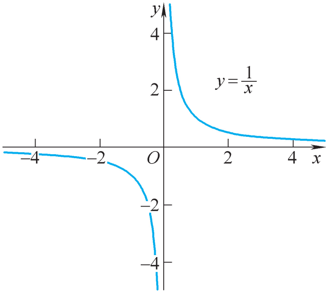


Figure 16： 在0点是无穷

解：由图 16可知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$，右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$都不存在，所函数$y = f(x) = \frac{1}{x}$的极限$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$不存在.

例1.7

振荡敏感函数$y=\sin\frac{\pi}{x}$

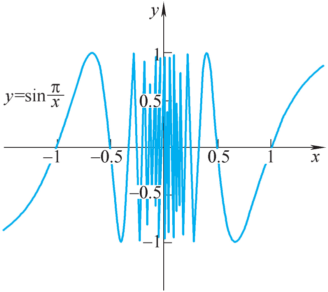


Figure 17 : 在0点振荡

解：由图 16可知，当x趋近于0时，函数$y=\sin\frac{\pi}{x}$振荡，不趋于任何值.

极限的性质

下面只介绍$x \to x_0$时函数极限的性质，其他变化过程中的极限也有类似性质．为叙述方便先给出邻域的概念．

定义 1.5 (邻域)

设$x_0 \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0$．数集 $\{x||x-x_0|<\delta\}$表示为$U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

称为x_0的δ邻域．当不需要说明邻域半径δ时，通常是对某个确定的邻域半径δ，常将其表示为$U(x_0)$，简称x_0的邻域．

数集 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$表示为$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\},$$

在x_0的邻域中去掉x_0，称为x_0的去心δ邻域．当不需要注明邻域半径δ时，通常是指某个确定的邻域半径δ，常将其表示为$\overset{\circ}{U}(x_0)$，简称x_0的去心邻域．

定理 1.2 (极限的性质)

1. (唯一性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则$A=B$.
2. (有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则函数$f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有界.
3. (保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，则在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有$f(x)>0$或$(f(x)<0)$.
   若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有$f(x)\geqslant 0$或$(f(x)\leqslant 0)$,
   则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).
4. (两边夹) 若在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,
   且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,
   且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

极限四则运算

前面用列表法和图像法求解了一些极限问题，但这两种方法都有局限性．为了进一步计算函数的极限，给出极限的四则运算法则．

定理 1.3 (极限四则运算)

若$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$；两个函数代数和的极限等于函数极限的代数和(可推广到有限多个).
2. $\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot \lim g(x)=A\cdot B$；两个函数乘积的极限等于函数极限的乘积(可推广到有限多个函数).
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$．两个函数商的极限，当分母的极限不为零时，等于这两个函数极限的商．

推论 1.4 (若C为常数,n为正整数,则有)

1. $\lim(Cf(x)) = C\lim f(x) = CA$;
   常数因子可以提到极限符号外面.
2. $\lim(f(x))^n = (\lim f(x))^n = A^n$;
   函数n次幂的极限，等于极限的n 次幂.

实际问题1.5 (产品价格预测)

设一产品价格满足$P(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-0.5t}$，请你对该产品价格作一个长期预测.

解：对该产品销售价格作长期预测. 方法之一是求$\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$的值，如图 **??**所示.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(t) &= \lim_{t\to\infty}(20 - 20\mathrm{e}^{-0.5t}) = \lim_{t\to\infty} 20 - \lim_{t\to\infty} 20\mathrm{e}^{-0.5t}\\ &= \lim_{t\to\infty} 20 - 20\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-0.5t} = 20 - 0 = 20.\end{aligned}$$

该产品的长期价格为20元.

产品价格预测

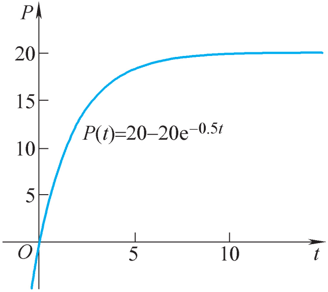


Figure 18 :

实际问题1.6 (某野生鱼数量)

通过诸多手段测得水中某野生鱼数量N与时间t满足关系

$$N = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.1158t}},$$

问该水域中最多有该种鱼数量多少？

解：求该鱼种的数量，实质是对鱼群数量的一个长期估计.
求$\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$即可.

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1000}{1 + 9e^{-0.1158t}} = \frac{1000}{1+0} = 1000.$$

该种野生鱼现存余量1000条. 如图 **??**所示.

某野生鱼数量

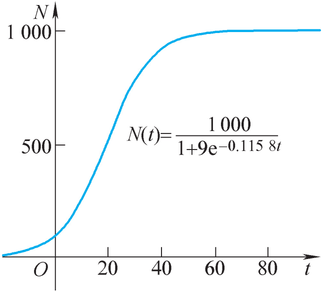


Figure 19 :

实际问题1.7 (产品销量变化趋势)

某新型产品一上市销量迅速上升，然后随时间延长，销量越来越少，其销量q与时间t的关系为$q=\frac{200t}{t^2+100}$，问该产品长期销售前景如何?

解：该产品长期销售量是对远期销售前景的一个预测，即求$\lim\limits_{t\to\infty} q$.

$$\lim_{t\to\infty} q=\lim_{t\to\infty}\frac{200t}{t^2+100}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{200}{t}}{1+\frac{100}{t^2}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

随着时间的推移，人们对该产品越来越失去信心，转而去购买其它产品. 看来企业要想生存下去，必须不断地开发新产品以满足人们不断增长的新需求，如图 18所示.

产品销量变化趋势

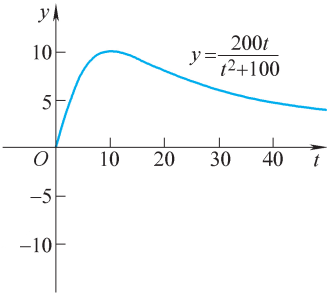


Figure 20 :

割线斜率变化趋势

例1.8 (割线斜率变化趋势)

设$y=\sqrt{x}$上两点$P(1,1),Q(x,\sqrt{x})$，研究割线PQ斜率的变化趋势.

解:

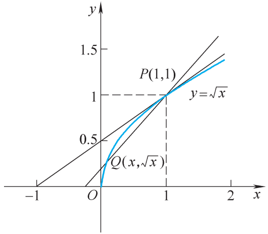


Figure 21 : PQ斜率变化

如左图割线PQ的斜率为

$$k=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

当x趋近于1时，Q点越来越趋近于P点，当Q点与P点重合时，

割线PQ的极限位置就是曲线$y=\sqrt{x}$过点$P(1,1)$的切线.

割线斜率变化趋势

由于$\lim\limits_{x\to1} x-1=0$，商的极限运算法则不能直接使用，可先对分子有理化，约去分子分母含有0的公因子，然后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2},$$

因此，可得曲线$y=\sqrt{x}$过点$P(1,1)$的切线为

$$y=\frac{1}{2}(x-1)+1.$$

两边夹法则

例1.9 (应用两边夹法则)

求 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$.

解：首先注意到不能用 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 极限不存在，可参考图 15所示.

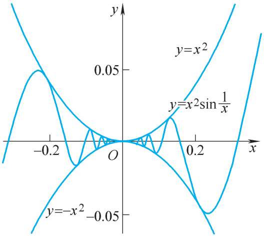


Figure 22： 两边夹

$$-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1,$$

$$-x^2 \leqslant x^2 \sin\frac{1}{x} \leqslant x^2,$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0(\text{两边夹}).$$

两个重要极限

例1.10 (两个重要极限)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

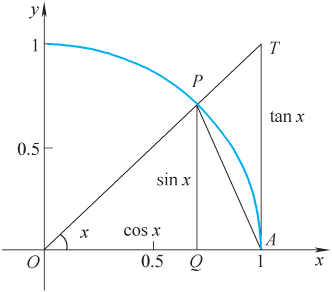


Figure 23 :

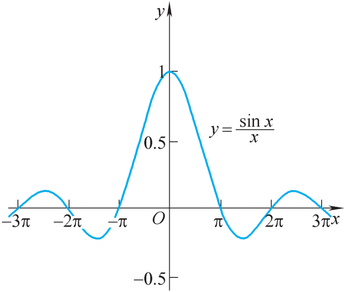


Figure 24 :

证明：因为$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$，所以只需讨论$x>0$时的情形即可.

作单位圆如图 22所示，设圆心角是$x(0<x<\frac{\pi}{2})$，过A 作切线与OP的延长线交于T. 于是，$\triangle AOP$的面积<扇形AOP的面积$<\triangle AOT$的面积. 即

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

同除以$\frac{1}{2}\sin x$并取它们的倒数，得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，由两边夹法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

如图23所示.

例1.11 (两个重要极限)

验证圆面积公式$A=\pi r^2$.

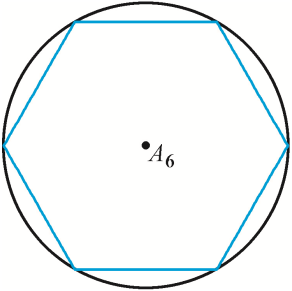


Figure 25 :

解：易得半径为r的圆的内接正n边形面积

$$A_n = \frac{r^2}{2} n \sin \frac{2\pi}{n} (n \geqslant 3),$$

求极限得

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^2}{2} n \sin \frac{2\pi}{n} = r^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \times \pi \right)$$

$$= \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2.$$

例1.12 (两个重要极限)

求极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

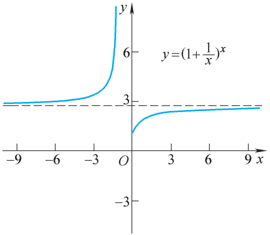


Figure 26 :

解:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

例1.13 (两个重要极限)

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}, \quad (\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}).$

列出$(1+\frac{1}{x})^x$的数值表，观察变化趋势，如表 2所示.

Table 2 : 计算结果

x	1	5	10	100	1000	10000	$\cdots$
$(1+\frac{1}{x})^x$	2	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	$\cdots$

由表 **??**可以看出，当$x\to\infty$时，$(1+\frac{1}{x})^x$ 的值无限趋近于e．如图 26所示.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad (\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}).$$

例1.14 (求极限)

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\ln\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\mathrm{e}=1.$$

例1.15 (求极限)

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a},a>0.$$

解：
$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}\ln\frac{x}{a}\right)=\lim_{x\to a}\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$
$$=\lim_{x\to a}\ln\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{1}{a}}$$

例1.16 (求极限)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}, a>0.$

解：设$y=a^x-1$或$x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$则$x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)} = \ln a\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} \\ &= \frac{\ln a}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a.\end{aligned}$$

例1.17 (求极限)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}.$$

解:

设$y=(1+x)^a-1$或$a\ln(1+x)=\ln(1+y)$. $x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$=a\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=a.$$

例1.18 (求极限)

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}$.

解：设$y=x-\alpha$，$x\to\alpha\Leftrightarrow y\to 0$，有

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}a^\alpha\frac{a^{x-\alpha}-1}{x-\alpha}=a^\alpha\lim_{x\to\alpha}\frac{a^{x-\alpha}-1}{x-\alpha}$$
$$=a^\alpha\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=a^\alpha\ln a.$$

后面有多处用到两个重要极限．特别是将用它们推导导数公式.

定义 1.6 (无穷小)

如果$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时，函数$f(x)$的极限为0，则称$f(x)$为无穷小.

注意：
(1) 无穷小是一个以0为极限的变量，常量中除0以外，无论多小的量都不是无穷小.
(2) 无穷小与自变量的变化过程密切相关，说一个量是无穷小，必须指明自变量x的变化趋势.
例如：当$x \to 0$时，$2x$是无穷小；而当$x \to 1$时，$2x$不是无穷小.

无穷小性质

定理 1.5 (无穷小有如下结论：)

1. 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;
2. 有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小;
3. 常数乘无穷小仍为无穷小;
4. 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

例1.19

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$.

解：当$x\to 0$时，$\sin\frac{1}{x}$是有界变量，根据无穷小性质2可知

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

如图24所示.

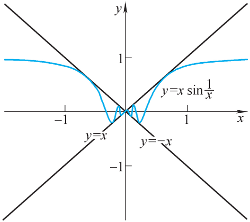


Figure 27：

无穷小与极限的关系

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，表示当$x\to x_0$时，函数$f(x)$ 趋近于常数A . 显然，$f(x)$趋近于A等价于$f(x)-A$ 趋近于零. 即当$x\to x_0$时，变量$f(x)-A$是无穷小. 容易看出，无穷小与极限之间存在如下结论.

定理 1.6 (无穷小与极限的关系)

函数$f(x)$以A为极限的充要条件是$f(x)$等于A与一个无穷小之和. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\quad \lim_{x\to x_0}\alpha=0.$$

定义 1.7 (无穷小比较)

设α,β是同一变化过程中的两个无穷小. (1) 如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小. 记为$\alpha=o(\beta)$.
(2) 如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C$($C$不为零的常数)，则称$\alpha$与$\beta$ 是同阶无穷小. 记为$\alpha=O(\beta)$.
特别地，当$C=1$时，称α与β是等价无穷小. 记为$\alpha\sim\beta$.

例1.20

当$x \to 0$时x，$3x$，x^3都是无穷小．由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

所以，当$x \to 0$时，x^3是比x高阶的无穷小；由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3,$$

所以，当$x \to 0$时，$3x$与x是同阶无穷小．

例1.21

当$x \to \infty$时，比较无穷小$\dfrac{1}{x}$与$\dfrac{1}{x^2}$.

解：当$x \to \infty$时，$\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x}$都是无穷小．由于

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

所以，当$x \to \infty$时，$\dfrac{1}{x^2}$是比$\dfrac{1}{x}$高阶的无穷小.

例1.22

当$x \to 0$时，比较无穷小$\dfrac{1}{1-x}-1-x$ 与x^2.

解：因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1-x}-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)(1-x)}{x^2(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1,$$

所以，当$x \to 0$ 时，$\dfrac{1}{1-x}-1-x$ 与x^2 是等价无穷小，

即$\dfrac{1}{1-x}-1-x \sim x^2$.

定义 1.8 (无穷大)

当$x \to x_0$时(或$x \to \infty$)时，如果函数$f(x)$的绝对值无限增大，则称$f(x)$为无穷大．记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$．

∞不是一个数，不表示极限存在．是极限不存在的一种特殊表示．

例如，当$x \to 1$时，$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$无限增大，所以$\lim\limits_{x \to 1}\left|\dfrac{1}{x-1}\right| = \infty$．

又如，当$x \to \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+$时，$\tan x$取负值且绝对值无限增大，所以$\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$．

无穷小与无穷大的关系

定理 1.7 (无穷小与无穷大的关系)

若$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小．反之，若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大．

例1.23

求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$.

解：因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=0,$$

故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty.$$

例1.24 (求下列各极限)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x-3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$;

解：(1) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}$

$$=\frac{3-0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}.$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}=\dfrac{0}{2}=0.$

例1.25 (求下列各极限)

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解：(3) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$.

一般地：当$a_0\neq 0, b_0\neq 0$ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0 & , \quad m<n;\\ \dfrac{a_0}{b_0} & , \quad m=n;\\ \infty & , \quad m>n.\end{cases}$$

等价无穷小代换定理

定义 1.9 (等价无穷小代换定理)

如果$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，且$\lim \dfrac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$存在，

则$\lim \dfrac{\alpha f(x)}{\beta g(x)} = \lim \dfrac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$.

常用的等价无穷小量：当$x \to 0$时，有

$\sin x \sim x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim (\mathrm{e}^x - 1) \sim \ln(1+x)$；

$(1-\cos x) \sim \dfrac{x^2}{2}$；$((1+x)^\mu - 1) \sim \mu x$ (μ为常数,$\mu \neq 0$).

无穷远极限与铅直水平渐近线

1 铅直渐近线

例1.26

讨论极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$.

解：当x趋近于0时，x^2也趋近于0，因此，$\dfrac{1}{x^2}$会变得很大．从图28可以看出，$f(x)$的值可以通过使x与0充分接近而变得任意大．因此$f(x)$的值不趋向一个数，因而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$不存在．即

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

通过让x与0充分接近，可以使$\dfrac{1}{x^2}$变得任意大．

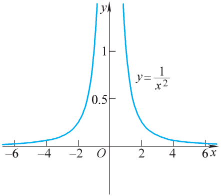


Figure 28 : 铅直渐近线

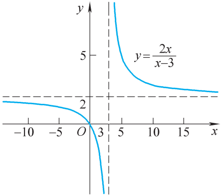


Figure 29 : 铅直渐近线

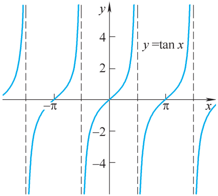


Figure 30 : 铅直渐近线

例1.27

讨论极限 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x-3}$.

解：如果x接近3但比3大，那么$x-3$是一个小的正数，而$2x$接近6．因此，$\dfrac{2x}{x-3}$是一个大的正数．因此，

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty.$$

同样地，如果x接近3但比3小，那么$x-3$是一个绝对值很小的负数，但$2x$仍然是一个接近6的正数．因此，$\dfrac{2x}{x-3}$是一个绝对值很大的负数．因此

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty.$$

如图 29，直线$x=3$是一条铅直渐近线．

例1.28

找出$f(x)=\tan x$的铅直渐近线.

解：因为

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

在$x=0$处，可能会有铅直渐近线．事实上，因为
当$x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$时，$\cos x=0^+$，当$x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$时，$\cos x=0^-$，而
当x在$\frac{\pi}{2}$附近时，$\sin x$为正，故

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty,$$

因此，$x=\frac{\pi}{2}$是一条铅直渐近线．同
理，$x=\frac{(2k+1)\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$是$f(x)=\tan x$的全部铅直渐近线．如
图 30所示.

2. 水平渐近线

铅直渐近线中讨论的是，设x趋近于一个常数，结果使y值变得任意大．下面设x趋近于无限大，看y如何变化．

例1.29

研究$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$的水平渐近线．

解：如图 30所示，当x无限增大时，$f(x)$的值越来越接近1．事实上

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

这表示，当x越来越大时，$f(x)$的值越来越接近1．
即$f(x)$以$y=1$为水平渐近线．

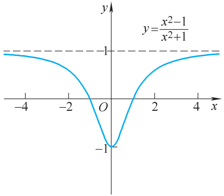


Figure 31 : 水平渐近线

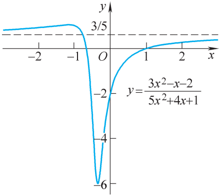


Figure 32 : 水平渐近线

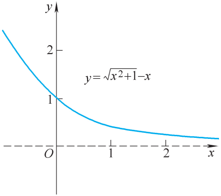


Figure 33 : 水平渐近线

2. 水平渐近线

例1.30

研究$f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$的水平渐近线.

解：如图 32所示，当x无限增大时，$f(x)$的值越来越接近$\frac{3}{5}$. 事实上

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{3}{5}.$$

这表示，当x越来越大时，$f(x)$的值越来越接近$\dfrac{3}{5}$.

即$f(x)$以$y=\frac{3}{5}$为水平渐近线.

例1.31

研究$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$的水平渐近线.

解：如图 31所示，当x无限增大时，$f(x)$的值越来越接近0．事实上

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0.\end{aligned}$$

这表示，当x越来越大时，$f(x)$的值越来越接近0.
即$f(x)$以$y=0$为水平渐近线.

函数连续性

气温的连续上升，植物的不断生长等都与“连续”有关.“连续”的数学定义与连续一词在实际生活中的含义非常接近.一个连续的过程是逐渐进行的过程，没有间断或者阶跃的过程.如果函数$y=f(x)$的图像可以用笔在纸上连续运动画出，则这个函数是连续函数.

实际问题1.8 (邮政计价)

当邮件的重量不超过100g时，每20克收邮费0.8元，不足20g计20g；超过100g时，超过部分的邮费按100g2元计算，不足100克计100克，且每个邮件的重量不超过200g．求邮件邮寄费用y(单位：元)与重量x(单位：g)的函数关系式．并用图表示上述函数关系．

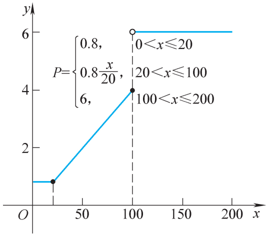


Figure 34：

解：考察函数

$$y=\begin{cases}0.8, & 0<x\leqslant 20;\\ 0.8\cdot\frac{x}{20}, & 20<x\leqslant 100;\\ 6, & 100<x\leqslant 200\end{cases}$$

在区间(0，200]各点的极限．结果发现，当$0<x_0<20$时，函数的极限值等于函数值，

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0.8,\ 0<x_0<20.$$

$$\lim_{x\to 20^-} f(x) = \lim_{x\to 20^+} f(x) = f(20) = 0.8.$$

当$20 < x_0 \leqslant 100$时，函数的极限值等于函数值.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0.8\cdot\frac{x_0}{20},\ \ 20 < x_0 \leqslant 100.$$

当$100 < x_0 \leqslant 200$时，函数的极限值等于函数值.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 6,\ \ 100 < x_0 \leqslant 200.$$

当$x_0 = 100$时，

$$\lim_{x\to 100^-} f(x) = f(100^-) = 0.8\times\frac{100}{20} = 4,$$

$$\lim_{x\to 100^+} f(x) = f(100^+) = 6,$$

$$f(100^-) \neq f(100^+).$$

此时，函数的极限值不存在，当然不等于函数值．函数图像如图34所示．

上面事实可以总结如下：已知函数$f(x)$在x_0存在极限A，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$x_0$可能属于函数$f(x)$的定义域，也可能不属于函数$f(x)$的定义域；即使$x_0$属于函数$f(x)$的定义域，$f(x_0)$也不一定等于$A$．$f(x_0)=A$有着特殊的意义．从图 35可以看出，这时函数具有连续性．

定义 1.10 (函数连续的定义)

设函数$f(x)$在$U(x_0)$有定义，若函数$f(x)$在x_0存在极限，且极限等于$f(x_0)$，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1.10}$$

则称$f(x)$在x_0连续，x_0是函数$f(x)$的连续点.

函数$f(x)$在x_0连续，不仅要求x_0要有属于$f(x)$的定义域，而且要有(1.10)式成立．因此，函数$f(x)$在x_0连续比函数$f(x)$在x_0存在极限有更高的要求．(1.10)式可改写为

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

定理 1.8 (函数连续的充要条件)

设$\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，则$f(x)$在x_0连续当且仅当

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0. \tag{1.11}$$

连续的本质：当自变量变化微小时，函数值相应变化也很微小.

1. 函数连续性

定义 1.11 (左连续右连续)

如果
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0), \tag{1.12}$$
则称函数$f(x)$在x_0左连续．如果
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0), \tag{1.13}$$
则称函数$f(x)$在x_0右连续．

定理 1.9 (连续的充要条件)

若$f(x)$在x_0连续，则$f(x)$在x_0既右连续又左连续．

定义 1.12 (区间连续)

如果$f(x)$在区间I的每一点都连续，则$f(x)$在区间I连续．

2. 函数$f(x)$在x_0连续性检验

函数$f(x)$在x_0连续，当且仅当满足下列条件

1. $f(x_0)$存在(x_0在$f(x)$定义域中);
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在(当$x\to x_0$时$f(x)$有极限);
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$(极限值等于函数值).

3. 函数的间断点

由函数$y=f(x)$在x_0连续的定义可知，函数$y=f(x)$在点x_0不连续有下列三种情况之一：

函数的间断点

1. 函数$f(x)$在点x_0的邻域$\overset{\circ}{U}(x_0)$有定义(在x_0没有定义)；
2. 虽然在x_0有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；
3. 虽然在x_0有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

则称函数$f(x)$在x_0不连续，x_0 称为函数$y=f(x)$的不连续点或间断点.

例如，函数$y=\frac{1}{x}$，在$x=0$ 没有定义，所以$x=0$是函数$y=\frac{1}{x}$ 的间断点.

4. 间断点分类

定义 1.13 (间断点分类)

设x_0是函数$f(x)$的间断点，如果当$x \to x_0$时，左、右极限都存在，则称x_0为$f(x)$ 的第一类间断点；否则，称x_0为$f(x)$ 的第二类间断点.

第一类间断点又分为：

1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，称$x_0$ 为可去间断点；
2. 虽如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$均存在但不相等，称$x_0$为$f(x)$的不可去间断点或跳跃间断点.

例1.32

讨论函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$在$x=-1$的连续性.

解：因为函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ 在$x=-1$没有定义, 所以函数$f(x)$在$x=-1$ 处不连续.

例1.33

求函数$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 的间断点，并说明类型.

解：$f(x)$在$x=0$ 有定义，但

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)=1,$$

所以点$x=0$是函数$f(x)$ 的间断点，且为第一类间断点(不可去).

实际问题1.9 (个人所得税计算公式)

个税起征点原来是2000元，现在是3500元，使用超额累进税率的计算方法：

缴税额＝全月应纳税所得额×税率－全月应纳税所得额速算扣除数

全月应纳税所得额＝(应发工资额－四金)－3500元

实发工资额＝应发工资额－四金－缴税额

扣除标准：2011年9月份起，个税按3500元/月的起征标准算

因此得，工资、薪金个人所得税计算函数

Table 3： 工资、薪金所得适用个人所得税7级超额累进税率表

级数	全月应纳税所得额x	税率%	速算扣除数(元)
1	$x \leqslant 1500$	3	0
2	$1500 < x \leqslant 4500$	10	105
3	$4500 < x \leqslant 9000$	20	555
4	$9000 < x \leqslant 35000$	25	1005
5	$35000 < x \leqslant 55000$	30	2755
6	$55000 < x \leqslant 80000$	35	5505
7	$80000 < x$	45	13505

$$f(x)=\begin{cases}0.03x, & x\leqslant 1500,\\ 0.1x-105, & 1500<x\leqslant 4500,\\ 0.20x-555, & 4500<x\leqslant 9000,\\ 0.25x-1005, & 9000<x\leqslant 35000,\\ 0.30x-2755, & 35000<x\leqslant 55000,\\ 0.35x-5505, & 55000<x\leqslant 80000,\\ 0.45x-13505, & 80000<x.\end{cases}$$

例1.34

某公司职员在扣除三险一金后的月收入为10000元，位于上表中的第3档.

解：对应的税率为20%，速算扣除数为555，
则应纳税额为（10000元-个税起征点3500元）＝6500元，
个税＝6500×20%-555元=745元.

例1.35

设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ 1+x, & x>1. \end{cases}$ 讨论$f(x)$在$x=1$ 的连续性.

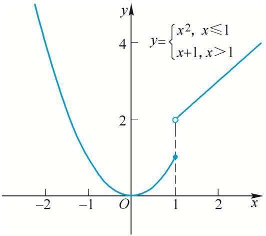


Figure 35 :

解：因为$f(1)=1$，而

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1+x) = 2$$

所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在，则函数$f(x)$在$x=1$ 处不连续.

例1.36

讨论函数$f(x)=\begin{cases}2x^2-x+1, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$ 在$x=0$ 的连续性.

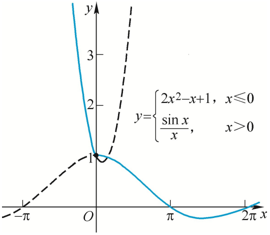


Figure 36：

解：因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x^2-x+1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ 由定义可知，函数$f(x)$在点$x=0$ 处连续.
如图34.

初等函数连续性

1. 基本初等函数的连续性

基本初等函数在定义域都是连续函数(图31-37). 例如，指数函数$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在定义域$\mathbb{R}$是连续函数.

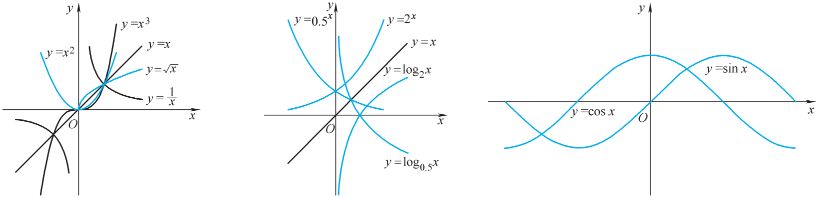


Figure 37： Figure 38： Figure 39：

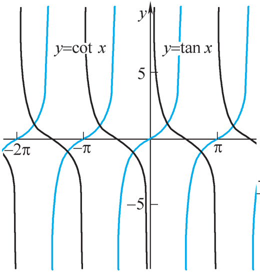


Figure 40 :

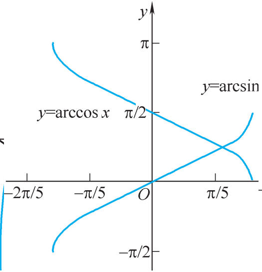


Figure 41 :

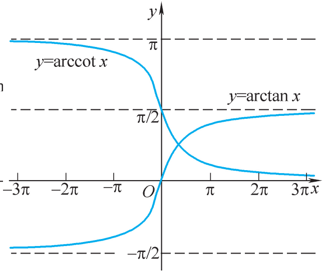


Figure 42 :

2. 初等函数的连续性

由基本初等函数，经有限次四则运算及有限次复合运算所生成的并且能用一个式子表示的函数称为初等函数．由基本初等函数的连续性，连续函数的和、差、积、商的连续性、反函数的连续性以及复合函数的连续性可得下列重要结论：一切初等函数(定义域仅是孤立点集的除外)在定义域都是连续函数．

若x_0 是初等函数定义区间内的点，由上述结论则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$．关于分段函数的连续性，除按上述结论考虑每一段函数的连续性外，要重点讨论分段点的连续性．

闭区间连续函数性质

闭区间连续函数的有界性定理、最值定理和介值定理．

定理 1.10 (有界性定理)

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$有界．即$\exists M>0,\forall x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant M. \tag{1.14}$$

如图43.

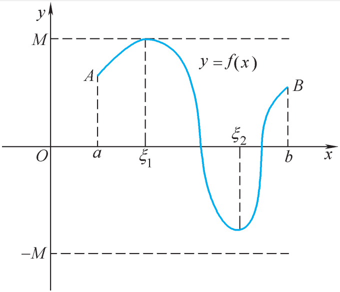


Figure 43： 有界性定理

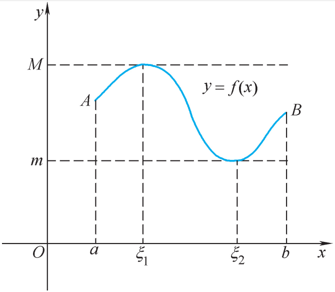


Figure 44： 最值定理

定理 1.11 (最大值和最小值定理)

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$有最大值M和最小值m．即$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，使$f(x_1)=m$与$f(x_2)=M$，且$\forall x\in[a,b]$，有$m\leqslant f(x)\leqslant M$．

一般来说，开区间连续函数可能取不到最大值或最小值．例如函数$f(x)=x$在$(0,1)$既取不到最大值也取不到最小值．如图 44 所示，若函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$至少存在一点$\xi_1\in[a,b]$，使得函数值$f(\xi_1)$为最小值，即$f(\xi_1)\leqslant f(x)$．又至少存在一点，$\xi_2\in[a,b]$，使得函数值$f(\xi_2)$为最大值，即$f(x)\leqslant f(\xi_2)$．

定理 1.12 (零点定理)

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，且$f(a)f(b)<0$(即$f(a)$与$f(b)$异号)，则至少存在一点$c\in[a,b]$，使

$$f(c)=0.$$

定理1.14的几何意义是，$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$是连续曲线，且连续曲线的始点$(a,f(a))$与终点$(b,f(b))$分别在x轴的两侧，则此连续曲线至少与x轴有一个交点.

定理 1.13 (介值定理)

设函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 连续，m与M分别是函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$的最小值与最大值，c是m与M之间的任意数$(m \leqslant c \leqslant M)$，则在闭区间$[a,b]$ 至少有一点$\xi(\xi \in [a,b])$，使得$f(\xi) = c$．如图 45所示．

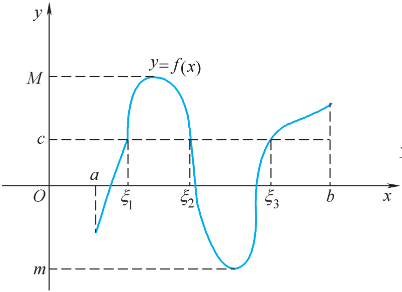


Figure 45 :

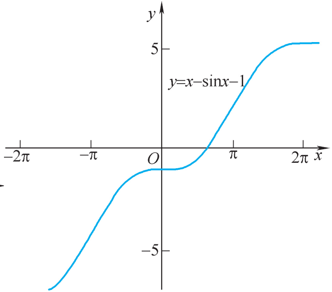


Figure 46 :

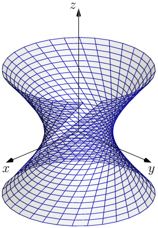
例1.37

求证方程$x-\sin x-1=0$ 在$[0,\pi]$至少存在一个实根ξ.

证明：设$f(x)=x-\sin x-1$，显然$f(x)$ 是初等函数，因此$f(x)$在闭区间$[0,\pi]$连续．又$f(0)=-1<0$，$f(\pi)=\pi-1>0$，由介值定理得，在$[0,\pi]$ 至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$，
即$\xi-\sin\xi-1=0,(\xi\in[0,\pi])$．这等式说明方程$x-\sin x-1=0$ 在$[0,\pi]$至少存在一个实根．如图 46所示.

该讲义由下列老师制作完成：
第一章、第三章，佘卫强
第二章、第四章，金明华
第五章、第六章，蔡建刚
第八章、第九章，黄美金
第七章，许建艺

Thank you!



Email: ltongfu@126.com